



**EXERCICE 1 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]1, +\infty[$  par :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

- ① Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$  et vérifier que :  $f'(x) = \frac{3}{2(x+2)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}$
- ② Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$
- ③ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_1 = 1$  puis interpréter géométriquement le résultat.
- ④ Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
- ⑤ Vérifier que  $f^{-1}$  est définie et strictement croissante sur  $J = ]0, 1[$
- ⑥ Vérifier que :  $(\forall x \in J) \quad f^{-1}(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 - x^2}$
- ⑦ Calculer  $f(2)$  puis  $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ .

**EXERCICE 2 :**

- 1) Calculer les limites : a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - 2}{4-x}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$
- 3) Comparer  $\alpha = \sqrt[5]{5}$  et  $\beta = \sqrt[3]{3}$
- 4) Simplifier :  $A = \frac{\sqrt[7]{a^{10}} \times \sqrt[14]{a^{-6}} \times \sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[6]{a^4} \times \sqrt[3]{a^2}}$  ; (avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$ )

**EXERCICE 3** on considère l'équation :

$$(E) : x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = 0$$

- 1°/ Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution  $\alpha \in ]-1, 0[$
- 2°/ Montrer que (E) n'admet pas d'autre solution dans  $\mathbb{R}$ .
- 3°/ Vérifier que :  $1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 > 0$
- 4°/ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

- \* fin \* -

## Correction du D.S [modèle] n°3

EX. 1

$$\forall x \in I = ]1, +\infty[, f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

① Soit  $x \in I$  donc :  $x > 1$ 

$$\text{on a : } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 1+2 > 0 \end{cases} \text{ donc : } \frac{x-1}{x+2} > 0$$

$$\text{donc } g: x \mapsto \frac{x-1}{x+2} \text{ est } > 0 \text{ sur } I$$

$g$  est dérivable sur  $I$  (car  $g$  est une fonction rationnelle définie sur  $I$ ) donc :  $f = \sqrt{g}$  est dérivable sur  $I$ .

Rappel :  $f = \sqrt{g}$ 

$$\text{si } \begin{cases} (\forall x \in I) g(x) > 0 \\ g \text{ dérivable sur } I \end{cases}$$

alors  $f$  est dérivable sur  $I$

$$\text{et on a : } f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in I) : f'(x) &= \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \right)' \\ &= \frac{\left( \frac{x-1}{x+2} \right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} = \frac{\frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 - (1 \times (-1))}{2(x+2)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \text{ donc :}$$

$$(\forall x \in I) f'(x) = \frac{3}{2(x+2)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}}$$

② on a : (T) :  $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ 

$$\begin{aligned} \text{avec : } f'(2) &= \frac{3}{2(2+2)^2 \times \sqrt{\frac{2-1}{2+2}}} \\ &= \frac{3}{2 \times 16 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{2+2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ donc :}$$

$$(T) : y = \frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{16}x - \frac{6}{16} + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{16}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$$

$$(T) : y = \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$$

③ Dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_1 = 1$ 

$$\text{on a : } f(1) = \sqrt{\frac{1-1}{1+2}} = \sqrt{\frac{0}{3}} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - 0}{x - 1}$$

$$(\text{on a : } x-1 > 0 \text{ donc : } x-1 = \sqrt{(x-1)^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2}} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)}{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+2)}} = +\infty$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{0^+}$$

donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_1$ .

Interprétation :  $(\mathcal{C}_f)$  admet une demi-tangente parallèle à l'axe  $(Oy)$  au point d'abscisse

$$x_1 = 1.$$

(c-à-d au point :  $A(1, 0)$ )



(4)  $f$  continue sur  $I$  (car dériv sur  $I$ )

d'après (1) on a:  $(\forall x \in I), f'(x) > 0$   
 donc  $f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $I$ .  
 donc  $f$  admet une fct réciproque  $f^{-1}$ .

(5)  $f^{-1}$  est définie sur  $J = f(I)$   
 $= f(]1, +\infty[)$   
 $= ]\lim_{1^+} f; \lim_{+\infty} f[$  (car  $f$  est  $\nearrow$ )

on a:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{0}{3} = 0$

donc:  $\lim_{1^+} f = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \sqrt{0} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$  donc:

$J = ]0; 1[$

$f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $I$

donc:  $f^{-1}$  est strictement  $\nearrow$  sur  $J$

(6) Soient  $x \in ]0; 1[$ ;  $y \in ]1; +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{y-1}{y+2}} = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+2} = x^2$

$\Leftrightarrow y-1 = yx^2 + 2x^2$

$\Leftrightarrow y(1-x^2) = 1+2x^2$

on a:  $1-x^2 \neq 0$  (car  $0 < x^2 < 1$ )

on trouve:  $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

en fait:  $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$

(7)  $f(2) = \sqrt{\frac{2-1}{2+2}} = \frac{1}{2}$

2

$(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = (f^{-1})'(f(2))$

$= \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{(\frac{3}{16})} = \frac{16}{3}$

EX. 2

1) (a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - 2}{4-x} = \frac{0}{0}$  F.I

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt[3]{x+4})^3 - (2)^3}{(4-x)(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 2^2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4-8}{-(x-4)(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 4)}$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{-(x-4)(\sqrt[3]{x+4}^2 + 2\sqrt[3]{x+4} + 4)}$

$= \frac{1}{-(2^2 + 2 \times 2 + 4)} = \frac{-1}{12}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$

(directement on trouve  $\frac{0}{0}$  F.I)

on a:  $x-1 > 0$  (car  $x > 1$ )

donc:  $x-1 = \sqrt[3]{(x-1)^3}$

donc:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{(x-1)^3}}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)^2}}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} = +\infty$

car  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

2]  $\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$

(on cherche tout d'abord D  
l'ensemble de définition de l'inéquation)

$x \in D \iff x^2+4x \geq 0$   
tableau de signe:

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$x^2+4x$		+	-	+

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

donc:  $D = ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$

Soit  $x \in D$ ; on a:

$\sqrt[6]{9} = \sqrt[2 \times 3]{3^2} = \sqrt[3]{3}$  donc:

$\sqrt[3]{x^2+4x} - \sqrt[6]{9} > 0$

$\iff \sqrt[3]{x^2+4x} > \sqrt[3]{3}$

$\iff x^2+4x > 3 \iff x^2+4x-3 > 0$

pour l'inéquation  $x^2+4x-3 > 0$

on a:  $\Delta = 16 - 4(-3)$   
 $= 16 + 12 = 28 > 0$

$(\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7})$

deux solutions:

$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 \frac{(-2 - \sqrt{7})}{2} = -2 - \sqrt{7}$

$x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{2} = -2 + \sqrt{7}$

Tableau de signe (de la 2<sup>ème</sup> inéquation)

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{7}$	$-2+\sqrt{7}$	$+\infty$
$x^2+4x-3$		+	-	+

$\underbrace{\hspace{10em}}_{> 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{> 0}$

donc:

$(x \in D \text{ et } x \in ]-\infty; -2-\sqrt{7}[ \cup ]-2+\sqrt{7}; +\infty[)$

3



( $x =$  "rouge et vrai en même temps")

donc:  $x \in ]-\infty; -2-\sqrt{7}[ \cup ]-2+\sqrt{7}; +\infty[$   
ensemble des solutions

3] on a:  $\alpha = \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[15]{125}$

$\beta = \sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243}$

$125 < 243$  donc:  $\boxed{\alpha < \beta}$

4] Soit  $a \in ]0; +\infty[$ . on a:

$\sqrt[7]{a^{10}} \times \sqrt[14]{a^{-6}} \times \sqrt[3]{a^6}$

$= a^{\frac{10}{7}} \times a^{-\frac{6}{14}} \times \sqrt[3]{a^6}$

$= a^{\frac{10}{7}} \times a^{-\frac{3}{7}} \times \sqrt[3]{a^6}$

$= a^{\frac{7}{7}} \times a = a^1 \times a = a^2$

et  $\sqrt[6]{a^4} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} \times a^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[12]{a^4} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{12}} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} = a^1$

donc:  $A = \frac{a^2}{a^1} = a^{2-1} = \boxed{a}$

EX. 3] (E):  $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = 0$

posons:  $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$

f est continue sur  $[-1; 0]$

$f(0) = 1 > 0$  et  $f(-1) = -3 < 0$  donc:

$f(0) \times f(-1) < 0$



d'après T.V.I l'équation  
 $f(x) = 0$  admet au moins  
 une solution  $\alpha \in ]-1; 0[$   
 donc (E) admet une solution  
 $\alpha \in ]-1; 0[$ .

2°/ on a:  $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1$

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

(car:  $x^6 \geq 0; x^4 \geq 0; x^2 \geq 0$  et  $1 > 0$ )

donc  $f$  est strictement croissante  
 sur  $\mathbb{R}$ .

donc  $\alpha$  est la seule solution  
 de l'équation; (c-à-d (E) n'admet  
 pas d'autre solution)

3°/ on a:  $\alpha \in ]-1; 0[$

donc:  $\alpha < 0$  donc  $\alpha^7 < 0$

et  $\alpha$  solution de (E); c-à-d:

$\alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha + 1 = 0$

donc:  $-\alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5$

$-\alpha^7 > 0 \Rightarrow 1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 > 0$

car  $\alpha^7 < 0$

4°/ Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

on a:  $-1 < \alpha < 0$

donc:  $\alpha + 1 > 0$

et  $\alpha^{2n} > 0$  donc:

$\alpha^{2n}(\alpha + 1) > 0$

on trouve:  $\alpha^{2n} \times \alpha + \alpha^{2n} > 0$  4

c-à-d:  $\alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

donc:  $(\forall n \in \mathbb{N}) \alpha^{2n+1} + \alpha^{2n} > 0$

— \* fin \* —